Διαφορικές Εξισώσεις 1

20/03/18

• Έστω $I=[a,b]$ και $F: I\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ συνεχής.
Έστω $(t_0,x_0)\in I\times\mathbb{R}^n$ και θεωρούμε το Π.Α.Τ.:

$$u'(t) = F(t,u(t)) \quad (1)$$
$$u(t_0) = x_0 \quad (2)$$

Με ολοκλήρωση της διαφορικής (1) έχουμε:

$$\int_{t_0}^{t} u'(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} F(s,u(s))\,ds$$

ή $u(t) - u(t_0) = \int_{t_0}^{t} F(s,u(s))\,ds$

Λαμβάνοντας υπόψην την αρχική συνθήκη έχουμε:

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s,u(s))\,ds \quad (\Delta)$$

το Π.Α.Τ είναι ισοδύναμο με την ολοκληρωτική εξίσωση.

• Έστω $X := \{x:[a,b]\to\mathbb{R}^n : x \text{ συνεχής}\}$
και ορίζουμε τελεστή: $T: X\to X$

με $(Tu)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s,u(s))\,ds$

Μια συνάρτηση u θα είναι λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης (Δ) εάν $Tu=u$, δηλαδή u είναι σταθερό σημείο του τελεστή T.

• Σχηματίζουμε την εξής ακολουθία

$$\varphi_0(t) = x_0$$
$$\varphi_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s,\varphi_0(s))\,ds$$

• $\varphi_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, \varphi_1(s))\,ds$

⋮

$\varphi_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, \varphi_n(s))\,ds$

Δηλαδή $\varphi_0(t) = x_0$

$\varphi_1(t) = T(\varphi_0(t))$

⋮

$\varphi_n(t) = T(\varphi_{n-1}(t))$

Η ακολουθία που ορίσαμε με αυτό τον τρόπο λέγεται ακολουθία Picard.

__Θεώρημα:__

Εάν $F : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ συνεχής

$(t,x) \to F(t,x)$

και Lipschitz (ως προς τη μεταβλητή x ομοιόμορφα ως προς t) τότε η επαναληπτική ακολουθία Picard συγκλίνει ομοιόμορφα προς κάποια συνάρτηση $\tilde{u}$ για $t \in [a,b]$. (με σταθερά Lipschitz L)

__Απόδειξη:__

Εφόσον F συνεχής στο $I \times \mathbb{R}^n$ και $I = [a,b]$ το $\sup_{t \in I} |F(t,x_0)| < \infty$. Έστω λοιπόν $M := \sup_{t \in I} |F(t,x_0)|$

Θα δείξουμε επαγωγικά ότι:

$$|\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)| \le \frac{M}{L} \frac{[L|t-t_0|]^n}{n!}$$

• <u>Θεωρούμε πρώτα την περίπτωση:</u>
<u>$t_0 \le t \le b$:</u>

Για $n=1$ έχουμε: $|q_1(t) - q_0(t)| = \left|x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, q_0(s))ds - x_0\right| = \left|\int_{t_0}^{t} F(s, q_0(s))ds\right| \le M\cdot(t-t_0) = \frac{M}{L}\left[\frac{L|t-t_0|}{1!}\right]^1$

Άρα η σχέση ισχύει για <u>$n=1$</u>

• Υποθέτουμε ότι η ανισότητα ισχύει για $n=k$.
δηλαδή:

$$|q_k(t) - q_{k-1}(t)| \le \frac{M}{L}\left[\frac{L|t-t_0|}{k!}\right]^k$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n=k+1$.
Πράγματι:

$$|q_{k+1}(t) - q_k(t)| = \left|x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, q_k(s))ds - \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, q_{k-1}(s))ds\right)\right| \le \left|\int_{t_0}^{t}\left(F(s, q_k(s)) - F(s, q_{k-1}(s))\right)ds\right| \le$$

$$\le \int_{t_0}^{t} |F(s, q_k(s)) - F(s, q_{k-1}(s))|ds \le \int_{t_0}^{t} L|q_k(s) - q_{k-1}(s)|ds \le$$

$$\le \int_{t_0}^{t} L\cdot\left(\frac{M}{L}\cdot\left[\frac{L|s-t_0|}{k!}\right]^k\right)ds = \int_{t_0}^{t} L\cdot\frac{M}{L}\left[\frac{L(s-t_0)}{k!}\right]^k ds =$$

$$= \frac{M}{L}\cdot\frac{L^{k+1}}{k!}\int_{t_0}^{t}(s-t_0)^k ds = \frac{M}{L}\cdot\frac{L^{k+1}}{k!}\int_{t_0}^{t}\left[\frac{(s-t_0)^{(k+1)}}{k+1}\right]' ds =$$

$$= \frac{M}{L}\cdot\frac{L^{k+1}}{k!}\frac{(t-t_0)^{k+1}}{k+1} = \frac{M}{L}\left[\frac{L|t-t_0|}{(k+1)!}\right]^{k+1}$$

Άρα ισχύει για $n=k+1$.
Άρα η ανισότητα ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Για $t \geq t_0$: Παρόμοια αποδυκνύεται ότι ισχύει η ανισότητα και για $a \leq t \leq t_0$.

$$|q_1(t) - q_0(t)| = \left| x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, q_0(s))ds - x_0 \right| =$$
$$= \left|\int_{t_0}^{t} F(s, q_0(s))\, ds\right| \leq \int_{t}^{t_0} |F(s, q_0(s))| ds \leq$$

$$\leq M \cdot (t_0 - t)$$

... (και κάνω επαγωγή πάλι όπως πριν)

Οπότε η ανισότητα ισχύει για κάθε $a \leq t \leq b$.
Τώρα για κάθε $t \in [a,b]$ και $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι:

$$\frac{M}{L} \cdot \frac{[L|t-t_0|]^n}{n!} \leq \frac{M}{L} \cdot \frac{[L \cdot |b-a|]^n}{n!}$$

$$\text{Όμως } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{M}{L} \frac{[L(b-a)]^n}{n!} = \left[\frac{M}{L} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{M}{L} \frac{[L(b-a)]^n}{n!} - \frac{M}{L}\right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{L} \frac{[L(b-a)]^n}{n!} - \frac{M}{L} \Big] = \frac{M}{L}\left(e^{L(b-a)} - 1\right)$$

δηλαδή η αριθμητική σειρά συγκλίνει

Άρα εφόσον η αριθμητική σειρά συγκλίνει έπεται (από το κριτήριο Weierstrass) ότι η:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (q_n(t) - q_{n-1}(t)) \text{ συγκλίνει ομοιόμορφα}$$

για $t \in [a,b]$.

→ με π.ο το A

[Κριτήριο Weirstrass: Έστω (f_v) μια ακολουθία συναρτήσεων τέτοια ώστε:

$\forall n\in\mathbb{N}$ να ισχύει ότι $|f_v(x)| \le M_n$, $n\in\mathbb{N}$, $x\in A$

όπου $M_n>0$. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ συγκλίνει τότε
↳ ακολουθία αριθμητική.

και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο A]

Έστω ότι η $\sum_{n=1}^{\infty}(q_n(t)-q_{n-1}(t))$ συγκλίνει σε μια συνάρτηση u με πεδίο ορισμού το $[a,b]$.
Όμως αν $f_n(t)=q_n(t)-q_{n-1}(t)$ τότε
$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει, άρα το όριο της ακολουθίας μερικών αθροισμάτων $(s_n(t))$ υπάρχει:

$$s_n(t) = \cancel{q_1(t)} - q_0(t) + \cancel{q_2(t)} - \cancel{q_1(t)} + \cdots + q_n(t) - \cancel{q_{n-1}(t)} = q_n(t) - q_0(t)$$

Αλλά $\lim s_n(t) = u(t)$ άρα $u(t) = \lim_n (q_n(t) - x_0)$

Άρα $\lim_n q_n(t) = u(t) + x_0 = \tilde{u}(t)$ ομ/φα στο $[a,b]$

και επειδή η (q_n) είναι ακολουθία συνεχών συναρτήσεων και η $\tilde{u}$ θα είναι επίσης συνεχής στο $[a,b]$ ως ομοιόμορφο όριο συνεχών.

Θεώρημα:

Έστω $F: I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ συνεχής

$(t,x) \to F(t,x)$

και πληρεί τη συνθήκη Lipschitz με σταθερά L ως προς τη μεταβλητή x ομοιόμορφα ως προς t.
Τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$u'(t) = F(t, u(t))$$
$$u(t_0) = x_0 \quad , (t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$$

- έχει μία ακριβώς μία λύση.

Απόδειξη:

Επαναληπτική ακολουθία Picard με $\varphi_0(t) = x_0$ και $\varphi_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, \varphi_n(s))\,ds$ είδαμε ότι

συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $\tilde{u}$ στο $[a,b] = I$.
η οποία $\tilde{u}$ είναι επίσης συνεχής στο $[a,b]$.
Λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 = n_0(\varepsilon)) : |\varphi_n(s) - \tilde{u}(s)| < \varepsilon \ \forall s \in [a,b], \forall n \geq n_0$$

Επιπλέον:

$$|F(s, \varphi_{n-1}(s)) - F(s, u(s))| \leq L \cdot |\varphi_{n-1}(s) - u(s)|$$

Άρα για $\varepsilon > 0$:

$$|F(s, \varphi_{n-1}(s)) - F(s, \tilde{u}(s))| \leq L \cdot \varepsilon, \forall s \in [a,b], \forall n \geq n_0$$

Άρα $F(\cdot, \varphi_n(\cdot)) \longrightarrow F(\cdot, \tilde{u}(\cdot))$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$

Συνεπώς:

$$\int_a^b F(s, \varphi_{n-1}(s))\,ds \longrightarrow \int_a^b F(s, \tilde{u}(s))\,ds$$

Οπότε από τη σχέση:

• $\varphi_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, \varphi_{n-1}(s))\, ds$

παιρνοντας ορια εχουμε:

$$\tilde{u}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, \tilde{u}(s))\, ds$$

Αρα η $\tilde{u}$ ικανοποιει την ολοκληρωτικη εξισωση.

Αρα ισοδυναμα ικανοποιειται το Π.Α.Τ.

• Η μοναδικοτητα εξασφαλιζεται απο το Θεωρημα μονοσημαντου της λυσης. εφοσου πληρουνται οι υποθεσεις.

<u>Θεώρημα</u>: Δίνεται μια πραγματική συνάρτηση

$f: [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$(t, x) \longrightarrow f(t,x)$

η οποια ειναι συνεχης, φραγμενη και ικανοποιει τη συνθηκη Lipschitz, με σταθερα $L>0$ (ως προς x ομοιομορφα για t). Τοτε η επαναληπτικη ακολουθια
• Picard με $\varphi_0(t) = x_0$ και $\varphi_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_{n-1}(s))\, ds$

συγκλινει προς τη λυση u της ολοκληρωτικης εξισωσης $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds$ και ικανοποιει τη σχεση:

$$|u(t) - \varphi_n(t)| \leq \frac{M \cdot L^n}{(n+1)!} t^{n+1}$$

οπου $M = \sup_{(t,x) \in I \times \mathbb{R}} |f(t,x)|$

(αντιστοιχα εκτιμα το σφαλμα $E_n = |u(t) - \varphi_n(t)|$)

Scanned by CamScanner

Απόδειξη:

$$\varphi_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, \varphi_0(s))\,ds$$

τότε για $t \in [0, b]$ υπάρχει $\xi \in (0, t)$

τέτοιο ώστε:

$$|u(t) - \varphi_0(t)| = |u(t) - u(0)| \overset{\Theta.M.T}{=}$$

$$= |u'(\xi)| \cdot t = |f(\xi, u(\xi))| \cdot t \leq M \cdot t$$

οπότε η σχέση ισχύει $n = 0$

Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = k$. Δηλαδή:

$$|u(t) - \varphi_k(t)| \leq \frac{M \cdot L^k \cdot t^{k+1}}{(k+1)!} \quad (**)$$

Τότε έχουμε: $|u(t) - \varphi_{k+1}(t)| = \left| x_0 + \int_0^t f(s, u(s))\,ds - \right.$

$$\left. - \left(x_0 + \int_0^t f(s, \varphi_k(s))\,ds\right) \right| = \left| \int_0^t \big(f(s, u(s)) - f(s, \varphi_k(s))\big)\,ds \right| \leq$$

$$\leq \int_0^t L\,|u(s) - \varphi_k(s)|\,ds \overset{(**)}{\leq} \int_0^t M \cdot \frac{L^k s^{k+1}}{(k+1)!}\,ds =$$

$$= \frac{L^{k+1} \cdot M}{(k+1)!} \cdot \int_0^t \left(\frac{s^{k+2}}{k+2}\right)' ds = \frac{M\,L^{k+1}}{(k+2)!} \cdot t^{k+2}$$

Άρα η σχέση ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό n.

Άσκηση:

Δίνεται το Π.Α.Τ

$u'(t) = u(t),\ t \in [0,b],\ b>0$
$u(0) = 1$

Να βρείτε την επαναληπτική ακολουθία Picard.

Απάντηση:

$u'(t) = u(t)$

με ολοκλήρωση έχουμε:

$$\int_0^t u'(s)\,ds = \int_0^t u(s)\,ds$$

ή $u(t) - u(0) = \int_0^t u(s)\,ds$

ή $u(t) = 1 + \int_0^t u(s)\,ds$

$q_0(t) = 1$

$q_1(t) = 1 + \int_0^t 1\,ds = 1+t$

$q_2(t) = 1 + \int_0^t (1+s)\,ds$

$q_2(t) = 1 + \int_0^t \left(s + \frac{s^2}{2}\right)' ds = 1+t+\frac{t^2}{2}$

$q_3(t) = 1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}$

Έστω ότι $q_k(t) = 1+t+\dots+\frac{t^k}{k!}$

Θ.δ.ο $q_{k+1}(t) = 1+t+\dots+\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}$

Πράγματι: $q_{k+1}(t) = 1+\int_0^t q_k(s)\,ds =$

$= 1+\int_0^t \left(1+s+\dots+\frac{s^k}{k!}\right)ds = 1+\left(s+\frac{s^2}{2}+\dots+\frac{s^{k+1}}{(k+1)!}\right)\Big|_0^t =$

$= 1+t+\frac{t^2}{2}+\dots+\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}$

Επομένως $q_n(t) = 1+t+\dots+\frac{t^n}{n!} = \sum_{k=1}^{n}\frac{t^k}{k!}$

$\lim_n q_n(t) = e^t$

→ μετρικοί χώροι

Ορισμός: Έστω $f:(X,\rho_1)\to(Y,\rho_2)$. Η f λέγεται συστολή εάν ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz με σταθερά $L<1$, δηλαδή αν υπάρχει $0<L<1$ έτσι ώστε $\forall x,y\in X$:

$$\rho_2(f(x),f(y)) \le L\cdot\rho_1(x,y)$$

Πρόταση: Εάν $f:[a,b]\to[a,b]$ συνεχής και παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε:

$$\theta = \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)| < 1$$

τότε η f είναι συστολή.

Απόδειξη: Έστω $x,y\in[a,b]$ με $x<y$ τότε από Θ.Μ.Τ θα έχουμε ότι $|f(x)-f(y)| =$

$= |f'(\xi)|\,|x-y| \le \theta|x-y|$ με $\xi\in(x,y)$

Παράδειγμα:

$f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [1, +\infty)$

Η f είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$ και παραγωγίσιμη και $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \leq \dfrac{1}{2}$

Άρα η f είναι συστολή στο $[1, +\infty)$

Θεώρημα: (Αρχή της συστολής ή Θεώρημα σταθερού σημείου του Banach):

Έστω (X, ρ) πλήρης μ.χ. X και $f: X \to X$ η οποία είναι συστολή. Τότε η f έχει μοναδικό σταθερό σημείο. Μάλιστα, για κάθε $x_0 \in X$ η ακολουθία:

$$x_1 = f(x_0), \; x_2 = f(x_1), \; \ldots, \; x_n = f(x_{n-1})$$

συγκλίνει στο σταθερό σημείο x.

Απόδειξη:

Εφόσον η f είναι συστολή, ισχύει $\rho(f(x), f(y)) \leq \ell \rho(x, y)$, $\forall x, y \in X$, όπου $0 < \ell < 1$.

Έστω $x_0 \in X$ και η ακολουθία $x_1 = f(x_0), \ldots, x_n = f(x_{n-1})$

Οπότε:

$$\rho(x_1, x_2) = \rho(f(x_0), f(x_1)) < \ell \rho(x_0, x_1)$$

$$\rho(x_2, x_3) = \rho(f(x_1), f(x_2)) < \ell \rho(x_1, x_2) \leq \ell^2 \rho(x_0, x_1)$$

Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι:

$$\rho(x_{n-1}, x_n) \leq \ell^{n-1} \rho(x_0, x_1)$$

Οποτε εαν $k>n$ (οπου $k,n\in\mathbb{N}$)

Εχουμε $\rho(x_n,x_k) \le \rho(x_n,x_{n+1}) + \rho(x_{n+1},x_{n+2}) + \dots +$

$+\rho(x_{k-1},x_k) \le \ell^n \rho(x_0,x_1) + \ell^{n+1}\rho(x_0,x_1) + \dots + \ell^{k-1}\rho(x_0,x_1) =$

$= \ell^n \underbrace{(1+\ell+\dots+\ell^{k-1-n})}_{\text{γεωμετρικη προοδος}} \rho(x_0,x_1) =$

$= \ell^n \cdot \left(\sum_{v=0}^{\infty} \ell^v\right) \rho(x_0,x_1) = \ell^n \cdot \frac{1}{1-\ell}\rho(x_0,x_1)$

Αλλα εφοσον $\ell<1$, $\lim_n \ell^n = 0$

Αρα για $\varepsilon>0$, $\exists\, n_0(\varepsilon)$ τετοιο ωστε:

$$\frac{\ell^n}{1-\ell}\cdot\rho(x_1,x_0) < \varepsilon$$

Οποτε για καθε $k>n>n_0(\varepsilon)$ ισχύει οτι:

$\rho(x_n,x_k)<\varepsilon$, δηλαδη (x_n) βασική ακολουθια

(Cauchy) στον χωρο X που ειναι πληρης. Δηλαδη x_n ειναι συγκλινουσα. Εστω $\lim_n x_{n+1} = x$

αλλα $x_{n+1} = f(x_n)$, αρα $\lim_n x_{n+1} = \lim_n f(x_n) = x$ (*)

Αλλα f συστολή. Αρα ειναι και συνεχής. και εφοσον $x_n \to x$ αρα και $f(x_n) \to f(x)$ (**)

Αλλα λογω της μοναδικοτητας του οριου απο (*) και (**) εχω οτι $f(x)=x$, δηλ x σταθερο σημειο για την f.

Για τη μοναδικότητα:

Έστω $x, y \in X$ με $x \neq y$ και $f(x) = x$, $f(y) = y$, τότε

$$\rho(\underbrace{f(x)}_{=x}, \underbrace{f(y)}_{=y}) \leq \ell \rho(x, y)$$

Άρα $\rho(x,y) \leq \ell \rho(x,y) \Rightarrow \underbrace{(1-\ell)}_{>0}\rho(x,y) \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho(x,y) \leq 0 \Rightarrow x = y$.